

Özet: $y' = f(x, y)$ denkleminin genel çözümü için

① $y' = h(x)g(y)$ yazılabilirse $\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$ olup DA dir. integral alınıp çözümlenir.

② $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ yazılabilirse HD dir ve $y = ux$ ile $y' = ux + u$ olup denklem DA olur.

③ $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ ise uygun dönüşüm ile denklem DA olur.
 $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ ise $\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases}$ den (h, k) bulunur ve $u = x + h$ $v = y + k$ ile denklem HD olur.

④ $y' = f(x, y) \Rightarrow M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ yazılırsa ve $M_y = N_x$ $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ ise TD dir.

⑤ $M_y \neq N_x$ ise denklem TD değildir. Bu durumda İG aranır.

$\frac{M_y - N_x}{N} \rightarrow$ sadece x e bağlı ise $\lambda(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$, $\frac{M_y - N_x}{-M} \rightarrow$ sadece y ye bağlı ise $\lambda(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$
 için $\lambda M(x, y)dx + \lambda N(x, y)dy = 0$ TD olur.

⑥ $y' + P(x)y = Q(x)$ ise LD dir ve $\lambda(x) = e^{\int P(x)dx}$ için $\lambda(x)y = \int \lambda(x)Q(x)dx + C$ genel çözüm.

⑦ $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ ise BD dir ve $u = y^{1-n}$ ile $u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$ LD olur.

⑧ $y' + P(x)y = Q(x)y + R(x)$ ise RD dir ve y_1 özel çözüm ise $y = y_1 + \frac{1}{u}$ ile LD olur.

Koruyk Örnekler

→ Verilen denklemler aynı anda birkaç denkleme dönere oit olabilir. Bu durumda istenilen qözüm yolu kullanılabilir, bulunarak genel qözüm aynı olur.

Örnek 1) $(x^5 + 3y)dx - xdy = 0$ denkleminin qözümünü bulunuz.

1.yol: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^5 + 3y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^4$ lineer denklemdir.

$$\lambda(x) = e^{\int -\frac{3}{x} dx} = e^{-3 \ln x} = x^{-3} = \frac{1}{x^3} \text{ olarak üzere genel qözüm}$$

$$\frac{1}{x^3} y = \int x^4 \cdot \frac{1}{x^3} dx + C \Rightarrow \frac{1}{x^3} y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \underline{2y - x^5 = 2Cx^3} \text{ dur}$$

2.yol: $M(x,y) = x^5 + 3y$ $M_y = 3$ $N(x,y) = -x$ $N_x = -1$ $M_y \neq N_x$ olup denklemin tam değıldir.



Scanned with
CamScanner

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3 - (-1)}{-x} = -\frac{4}{x}$$

y 'e bağılı olup $\lambda(x) = e^{\int -\frac{4}{x} dx} = e^{-4 \ln x} = x^{-4}$ integral carpanıdır.

Denklemin $Q(x) = x^4 = \frac{1}{x^{-4}}$ ile çarpılır sa

$$\left(x + \frac{3y}{x^4}\right) dx - \frac{1}{x^3} dy = 0 \quad \text{tam diferansiyel denklem elde edilir.}$$

Geriye

$$\left. \begin{array}{l} P(x,y) = x + \frac{3y}{x^4} \\ Q(x,y) = -\frac{1}{x^3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} P_y = \frac{3}{x^4} \\ Q_x = \frac{3}{x^4} \end{array} \quad P_y = Q_x \text{ olup tam diferansiyeldir.}$$

Orada

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + \frac{3y}{x^4} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^3} \quad \text{olacak şekilde } u(x,y) \text{ vardır.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{x^3} \Rightarrow u(x,y) = \int -\frac{1}{x^3} dy + h(x)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = -\frac{y}{x^3} + h(x) \text{ olur. } x' \text{ e göre türevi alırsak}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3y}{x^4} + h'(x) \text{ olur ve } \frac{\partial u}{\partial x} = x + \frac{3y}{x^4} \text{ olduğundan}$$

$$\frac{3y}{x^4} + h'(x) = x + \frac{3y}{x^4} \Rightarrow h'(x) = x \Rightarrow h(x) = \int x dx \Rightarrow h(x) = \frac{x^2}{2}$$

bulunur.

Genel çözüm $u(x,y) = c$ olduğundan

$$\frac{3y}{x^4} + \frac{x^2}{2} = c \Rightarrow -2y + x^5 = 2cx^3 \text{ bulunur}$$

$$\text{veya } 2y - x^5 = 2cx^3 \text{ yazılabilir.} \quad -128-$$



Scanned with
CamScanner

Örnek 2) $(x^4 + y^4) dx - xy^3 dy = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

1. adı: $(x^4 + y^4) dx - xy^3 dy = 0$ M ve N aynı dereceden olduğundan
denklemin homojendir, veya

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^4}{xy^3} = \frac{x^4 \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4\right)}{x^4 \left(\frac{y}{x}\right)^3} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^4}{\left(\frac{y}{x}\right)^3} = g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ formunda}$$

olduğundan homojen denklemdir.

$$\frac{y}{x} = u \text{ dersek } y = ux \Rightarrow y' = u'x + u \text{ olup}$$

$$u'x + u = \frac{1 + u^4}{u^3} \Rightarrow u'x = \frac{1}{u^3} \Rightarrow \frac{du}{dx} x = \frac{1}{u^3}$$

$$\Rightarrow u^3 du = \frac{dx}{x} \text{ değişkenlerine ayırabilir denklemin ekle edilir}$$

$$\Rightarrow \frac{u^4}{4} = \ln x + C \text{ çözümdür.}$$

$u = \frac{y}{x}$ yazılırsa istenen genel çözüm

$$\frac{y^4}{x^4} = \ln x + C$$



Scanned with
CamScanner

örnek bulunur.

2.yol: Denklem düzenlerince

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^4}{xy^3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^3 y^{-3}$$

Sevkinde $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = x^3$, $n = -3$ den Bernoulli denklemi olur.

$$u = y^{1-n} = y^{1-(-3)} = y^4 \text{ denörsüne yapılırsa}$$

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x)$$

lineer denklemi elde edileceğinden

$$u' - \frac{4}{x}u = 4x^3$$

lineer denklem olur. $A(x) = e^{\int -\frac{4}{x} dx} = e^{-4 \ln x} = \frac{1}{x^4}$ için

lineer denklemin çözümü

$$\frac{1}{x^4} \cdot u = \int \frac{1}{x^4} \cdot 4x^3 dx + c \Rightarrow \frac{1}{x^4} u = 4 \ln x + c \text{ bulunur.}$$

$u = y^4$ yerine yazılırsa istenen genel çözüm

$$\frac{y^4}{x^4} = 4 \ln x + c$$

3.yol: $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$ isn.

$$\left. \begin{array}{l} M(x,y) = x^4 + y^4 \\ N(x,y) = -xy^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} M_y = 4y^3 \\ N_x = -y^3 \end{array} \quad M_y \neq N_x \text{ olden denklem} \\ \text{tam de\u011erildir.}$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{4y^3 - (-y^3)}{-xy^3} = \frac{5y^3}{-xy^3} = -\frac{5}{x}, \text{ sadece } x' \text{ e ba\u011flı olup}$$

$$a(x) = e^{\int -\frac{5}{x} dx} = e^{-5 \ln x} = x^{-5} = \frac{1}{x^5} \text{ integral yaparız. Buradan}$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}\right) dx - \frac{y^3}{x^4} dy = 0 \text{ tam diferansiyel denklemdir.}$$

0 halde $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y^3}{x^4}$ olarak se\u00e7tik $u(x,y)$ vardır.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y^3}{x^4} \Rightarrow u(x,y) = \int -\frac{y^3}{x^4} dy + h(x) \Rightarrow u(x,y) = -\frac{y^4}{4x^4} + h(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^4}{x^5} + h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{y^4}{x^5} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow h(x) = \ln x$$



$u(x,y) = C$ genel \u00c7\u00f6z\u00fcm olup $-\frac{y^4}{4x^4} + \ln x = C$ olarak bulunur.

Örnek 3) $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{y-4x}$ denkleminin çözümünü bulunuz

1. yol: $\frac{dx}{dy} = \frac{y-4x}{y+1} \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{4}{y+1} x = \frac{y}{y+1}$ bu lineer denklemdir.

$$A(y) = e^{\int \frac{4}{y+1} dy} = e^{4 \ln(y+1)} = (y+1)^4 \text{ olarak önce genel çözüm}$$

$$(y+1)^4 \cdot x = \int \frac{y}{y+1} \cdot (y+1)^4 dy + c$$

$$(y+1)^4 x = \int y(y+1)^3 dy + c$$

$$(y+1)^4 x = \int (u-1)u^3 du + c$$

$$(y+1)^4 x = \int (u^4 - u^3) du + c$$

$$(y+1)^4 x = \frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} + c$$

$$(y+1)^4 x = \frac{(y+1)^5}{5} - \frac{(y+1)^4}{4} + c$$

$$y+1=u \Rightarrow dy=du \\ y=u-1$$



Scanned with
CamScanner

$$x = \frac{1}{4} + \frac{c}{(y+1)^4}$$

olarak bulunur.

2.yol: $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{y-4x}$ $\left. \begin{array}{l} a_1=0, b_1=1, c_1=1 \\ a_2=-4, b_2=1, c_2=0 \end{array} \right\} \exists c_1, c_2 \neq 0 \text{ ve}$

$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 - (-4) = 4 \neq 0$ olduğundan denklem homojen denkleme indirgenebilir.

$\left. \begin{array}{l} k+1=0 \\ k-4h=0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} k=-1 \\ h=-\frac{1}{4} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x=u-\frac{1}{4} \\ y=v-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} \text{ olup}$

$\frac{dv}{du} = \frac{v-1+1}{v-1-4(u-\frac{1}{4})} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{v}{v-4u}$ homojen denkleme eklenir.

$v=tu \Rightarrow v'=t'u+t \left(\frac{dv}{du} = \frac{dt}{du} u + t \right)$ dönüşümü

$t'u+t = \frac{tu}{tu-4u} \Rightarrow t'u = \frac{5t-t^2}{t-4} \Rightarrow \frac{dt}{du} u = \frac{5t-t^2}{t-4}$

$\Rightarrow \frac{t-4}{5t-t^2} dt = \frac{du}{u}$ değişkenlere ayrılabilir denkleme eklenir.

$\Rightarrow \int \left(-\frac{4}{5t} + \frac{1}{5} \frac{1}{5-t} \right) dt = \int \frac{du}{u} \Rightarrow -\frac{4}{5} \ln t - \frac{1}{5} \ln(5-t) = \ln u + \ln c$



Scanned with

CamScanner

$u = x + \frac{1}{4}, v = y + 1$ olduğundan

$x = \frac{y+1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{c}{(y+1)^4}$ elde edilir
100

3. yol: $(y+1)dx + (4x-y)dy = 0$

$$\begin{aligned} M(x,y) &= y+1 & M_y &= 1 \\ N(x,y) &= 4x-y & N_x &= 4 \end{aligned} \quad M_y \neq N_x \quad \text{olduğundan tam diferanسیل değildir.}$$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1-4}{4x-y} = -\frac{3}{4x-y} \quad \text{sadece } x\text{'e bağımlı değildir}$$

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1-4}{-(y+1)} = -\frac{3}{y+1} \quad \text{sadece } y\text{'ye bağımlı} \Rightarrow \lambda(y) = e^{\int \frac{3}{y+1} dy} = (y+1)^3$$

integral çarpanı olup $(y+1)^4 dx + (y+1)^3(4x-y)dy = 0$ tam diferanسیل olur.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y+1)^4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (y+1)^3(4x-y) \quad \text{olduğundan } u(x,y) \text{ vardır.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y+1)^4 \Rightarrow u(x,y) = \int (y+1)^4 dx + h(y)$$

$$u(x,y) = x(y+1)^4 + h(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x(y+1)^3 + h'(y) = (y+1)^3(4x-y) \Rightarrow h'(y) = -y(y+1)^3$$

$$\Rightarrow h(y) = -\frac{(y+1)^5}{5} + \frac{(y+1)^4}{4}$$

genel çözüm $u(x,y) = c$ olduğundan

$$x(y+1)^4 - \frac{(y+1)^5}{5} + \frac{(y+1)^4}{4} = c \Rightarrow x = \frac{y+1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{c}{(y+1)^4} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 4) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2+y}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

1.yol: $2xy dx + (x^2+y)dy = 0$

$$\begin{array}{l} M(x,y) = 2xy \\ N(x,y) = x^2+y \end{array} \quad \begin{array}{l} M_y = 2x \\ N_x = 2x \end{array} \quad \begin{array}{l} M_y = N_x \text{ olduğundan denklem} \\ \text{tamdır.} \end{array}$$

Gruplandırma yapılırsa

$$(2xy dx + x^2 dy) + y dy = 0$$

$$d(x^2y) + y dy = d(c)$$

$$x^2y + \frac{y^2}{2} = C$$

genel çözümünü bulunur.

2.yol: $\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2+y}{2xy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{1}{2y}x = -\frac{1}{2}x^{-1}$ olup Bernoulli

denklemdir. $P(y) = \frac{1}{2y}$, $Q(y) = -\frac{1}{2}$, $n = -1$ için $u = x^{1-(-1)} = x^2$ dönüşümü

ile $u' + \frac{1}{y}u = -1$ lineer denklemi elde edilir. $g(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$ için
genel çözüm $yu = \int -y dy + C \Rightarrow yu = -\frac{y^2}{2} + C$ olup $u = x^2$ den $yx^2 = -\frac{y^2}{2} + C$ bulunur.